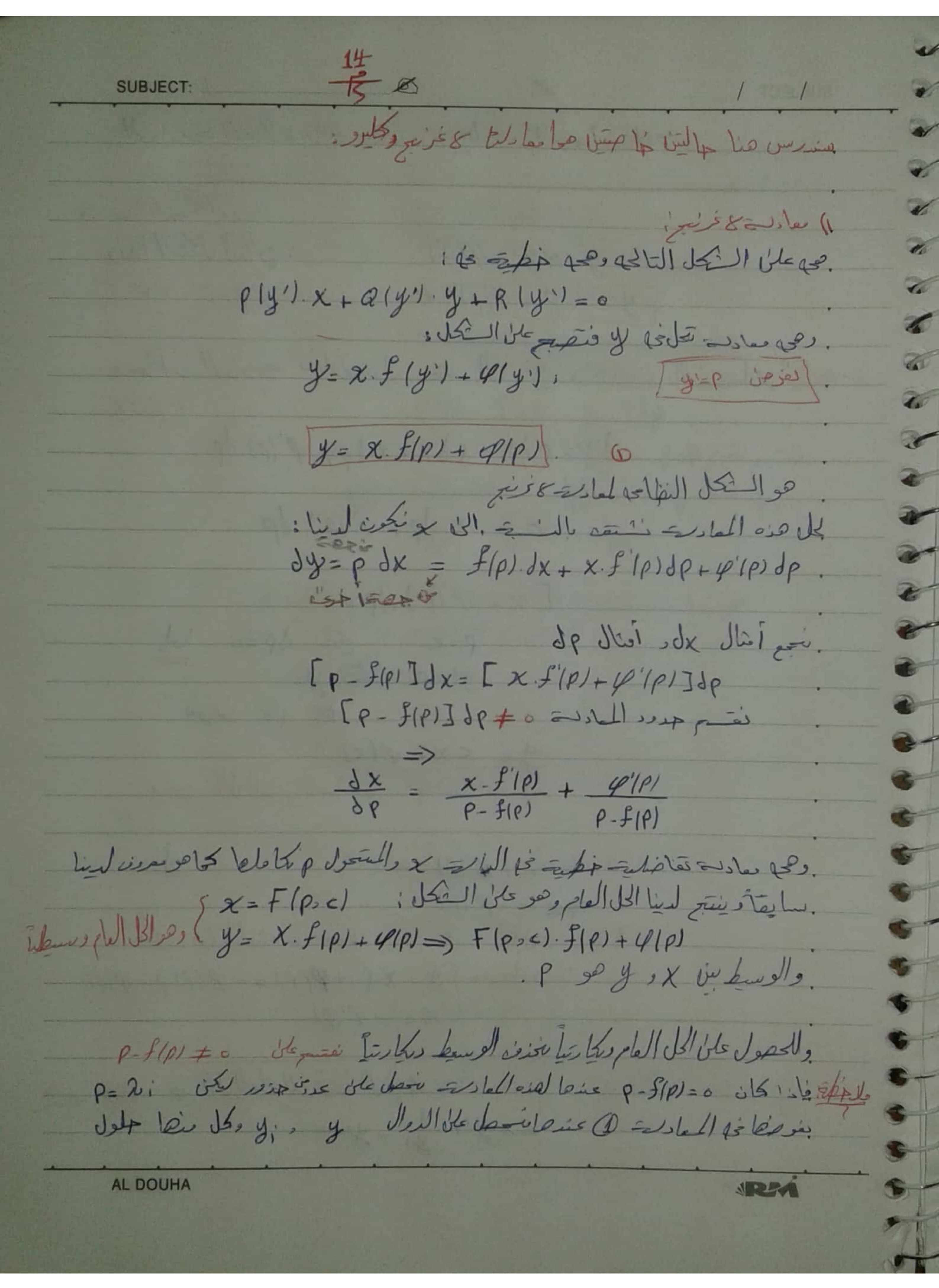


سندرس هنا حالتين خاصتين هما معادلتا لاغرنج وكليرو:

1) معادلة لاغرنج:

هي على الشكل التالي وهي خطية في x:

$$P(y')\cdot x + Q(y')\cdot y + R(y') = 0$$

وهي معادلة تحل في y فتصبح على الشكل:

$$y = x\cdot f(y') + \varphi(y') ;$$

نفرض $y' = p$

$$y = x\cdot f(p) + \varphi(p) \quad (1)$$

هو الشكل النظامي لمعادلة لاغرنج

لحل هذه المعادلة نشتق بالنسبة الى x فيكون لدينا:

نعوض

$$dy = p\,dx = f(p)\cdot dx + x\cdot f'(p)\,dp + \varphi'(p)\,dp$$

نشتق جداء

نجمع أمثال dx، أمثال dp

$$[p - f(p)]\,dx = [x\cdot f'(p) + \varphi'(p)]\,dp$$

نقسم حدود المعادلة $[p - f(p)]\,dp \neq 0$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x\cdot f'(p)}{p - f(p)} + \frac{\varphi'(p)}{p - f(p)}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية في التابع x والمتحول p نكاملها كما هو معروف لدينا سابقاً وينتج لدينا الحل العام وهو على الشكل:

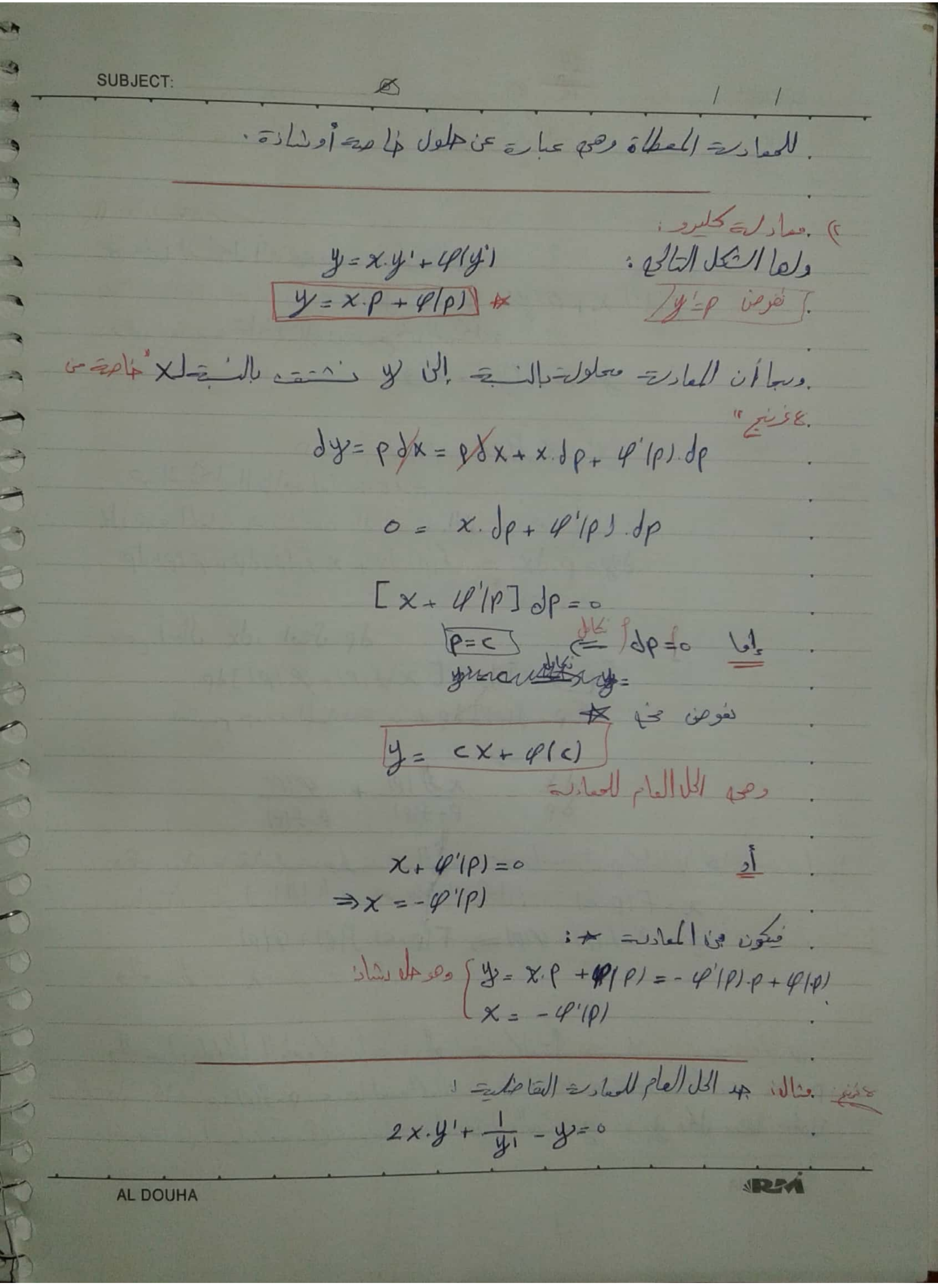
$$\begin{cases} x = F(p, c) \\ y = x\cdot f(p) + \varphi(p) \Rightarrow F(p,c)\cdot f(p) + \varphi(p) \end{cases}$$

وهو الحل العام وسيطياً

والوسيط بين x و y هو p.

وللحصول على الحل العام ديكارتياً نحذف الوسيط ديكارتياً. نقسم على $p - f(p) \neq 0$

ملاحظة: فإذا كان $p - f(p) = 0$ عندها لهذه المعادلة نحصل على عدة جذور لتكن $p = \lambda_i$ بتعويضها في المعادلة (1) عندها نحصل على الدوال y ، y_i وكل منها حلول



للمعادلة المعطاة وهي عبارة عن حلول خاصة أو شاذة.

---

٢) معادلة كليرو:

ولها الشكل التالي: $y = x.y' + \varphi(y')$

نفرض $y' = p$

$$\boxed{y = x.p + \varphi(p)} \quad \bigstar$$

وبما أن المعادلة محلولة بالنسبة إلى y نشتق بالنسبة لـ x "خاصية من عوضنا"

$$dy = p\,dx = p\,dx + x.dp + \varphi'(p).dp$$

$$0 = x.dp + \varphi'(p).dp$$

$$[x + \varphi'(p)]\,dp = 0$$

إما $dp = 0 \overset{\text{بالتكامل}}{\Longleftarrow}$ $\boxed{p = c}$

نعوض في $\bigstar$

$$\boxed{y = cx + \varphi(c)}$$

وهو الحل العام للمعادلة

أو

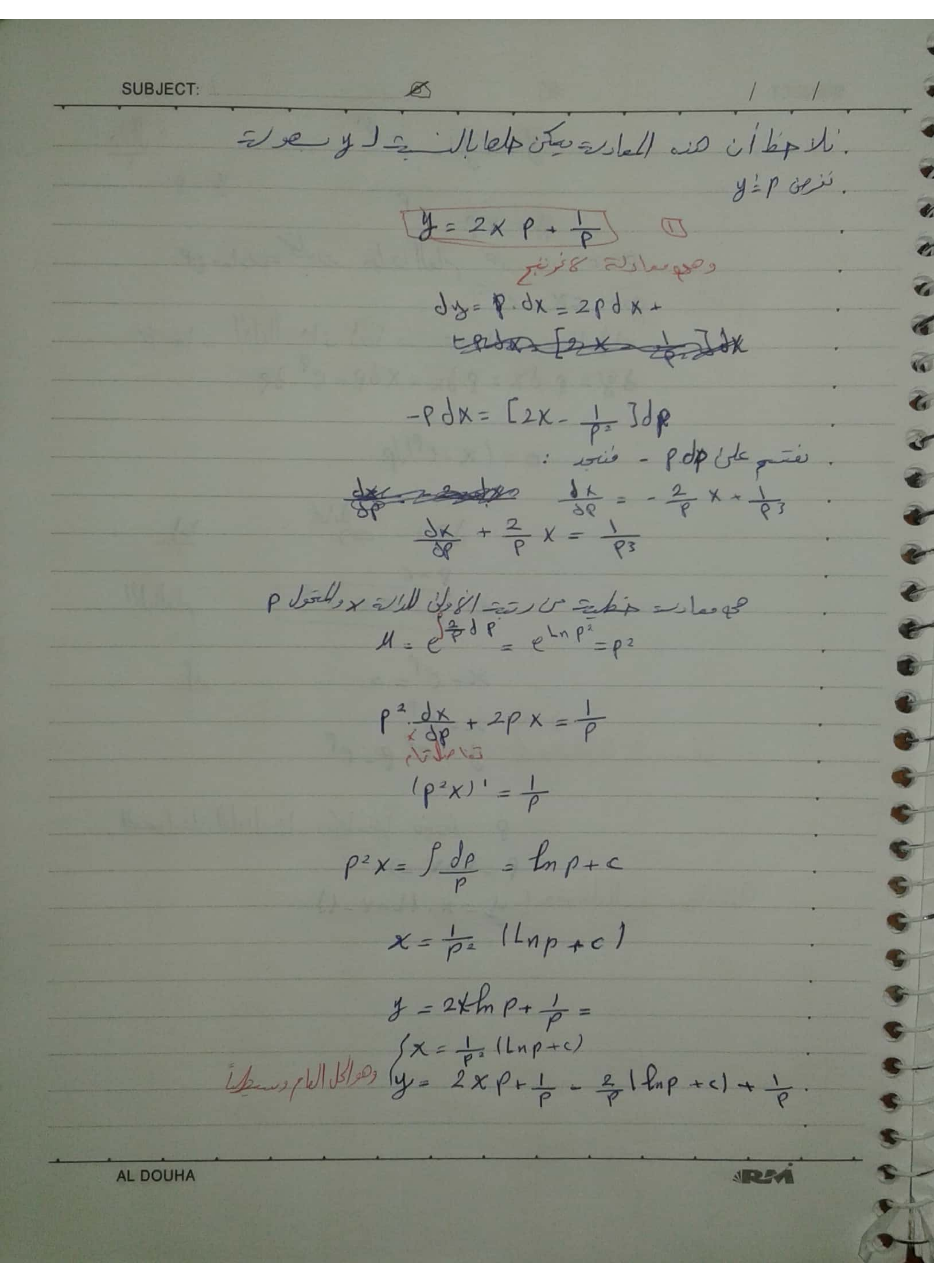
$$x + \varphi'(p) = 0$$
$$\Rightarrow x = -\varphi'(p)$$

فيكون من المعادلة $\bigstar$:

$$\begin{cases} y = x.p + \varphi(p) = -\varphi'(p).p + \varphi(p) \\ x = -\varphi'(p) \end{cases}$$ وهو حل شاذ

مثال: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية: (عوضنا)

$$2x.y' + \frac{1}{y'} - y = 0$$



نلاحظ أن هذه المعادلة يمكن حلها بالنسبة لـ y بسهولة

نفرض $y' = p$

$$y = 2xp + \frac{1}{p} \quad (1)$$

وهي معادلة لاغرانج

$$dy = p\,dx = 2p\,dx +$$

$$-p\,dx = \left[2x - \frac{1}{p^2}\right]dp$$

نقسم على $-p\,dp$ فنجد:

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x + \frac{1}{p^3}$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = \frac{1}{p^3}$$

هي معادلة خطية من رتبة الأولى للدالة x والمتحول p

$$\mu = e^{\int \frac{2}{p}dp} = e^{\ln p^2} = p^2$$

$$p^2 \cdot \frac{dx}{dp} + 2px = \frac{1}{p}$$

تفاضل تام

$$(p^2x)' = \frac{1}{p}$$

$$p^2x = \int \frac{dp}{p} = \ln p + c$$

$$x = \frac{1}{p^2}(\ln p + c)$$

$$y = 2x\ln p + \frac{1}{p} =$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p^2}(\ln p + c) \\ y = 2xp + \frac{1}{p} - \frac{2}{p}(\ln p + c) + \frac{1}{p} \end{cases}$$

وهو الحل العام وسيطياً

SUBJECT:

مثال ١

$$y = xy' - e^{y'}$$

$y' = p$

$$y = xp - e^{p}$$

هي معادلة كليرو حلها العام هو $p = c$

الحل العام $\boxed{y = cx - e^{c}}$

لإيجاد الحل الشاذ لها نشتق المعادلة المعطاة

$$dy = p\,dx = p\,dx + x\,dp - e^{p}.dp$$

$$0 = (x - e^{p})dp$$

إما $dp = 0 \Rightarrow$ نكامل

$p = c$

الحل العام $\Rightarrow \boxed{y = cx - e^{c}}$

أو $x - e^{p} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = e^{p} \\ y = e^{p}.p - e^{p} \end{cases}$ وهو الحل الشاذ وسيطياً.

للحصول على الحل الشاذ ديكارتياً نحذف p

$p = \ln x \Rightarrow$

$(y = x.(\ln x - 1))$ وهو الحل الشاذ ديكارتياً